ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ ОТОБРАЖЕНИЯ $f_a: A_m \to A_n (m \geq n)$

Б.А.А н д р е е в

Результаты работ [2], [3] автора применяются к изучению характеристических конфигураций локального дифференцируемого отображения $f_a: A_m \to A_n$ $(m \geq n)$. Предлагается классификация специальных типов характеристических конфигураций. Изучаются свойства присоединенных геометрических образов 2-й дифференциальной окрестности в точках с характеристическими конфигурациями рассмотренных типов.

В [2] показано, что конус характеристических прямых отображения $f: P_m \to A_n (m>n)$ в точке $P^\circ \in P_m$ определяется своей инвариантной направляющей $\mathfrak{I}$, названной индикатрисой, а характеристическая гомография H_ℓ, заданная на характеристической прямой $\ell \in \{P^\circ\}$ при данной связке касательных коллинеаций $K(P_\mathfrak{I})$, определяется условием $H_\ell(A) \in \pi^\circ$, где A -главная точка, т.е. точка пересечения прямой ℓ с индикатрисой $\mathfrak{I}$. Таким образом, при данных $K(P_\mathfrak{I})$ характеристическая конфигурация отображения f в точке P° целиком определяется индикатрисой $\mathfrak{I}$. Пусть A_m - расширенное аффинное пространство, полученное из P_m фиксацией в нем гиперплоскости Π°. Поместив в Π° вершины $R_\mathfrak{I}$ репера, получим: $\Omega^\circ_\mathfrak{I} \equiv 0$. Уравнения (8) [2] примут вид:

$$\overset{\circ}{\nabla} \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta} = 0, \quad \overset{\circ}{\nabla} \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\hat{\beta}} = \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta} \Pi^{\beta}_{\hat{\beta}}, \quad \overset{\circ}{\nabla} \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}} = \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\beta(\hat{\beta}} \Pi^{\beta}_{\hat{\gamma})}. \qquad (1)$$

Пусть $m > n > 1$. Из (1) вытекает, что системы величин

$$t_1 = \{\Lambda^{\hat{\gamma}}_{\alpha\beta}\}, \; t_2 = \{\Lambda^{\hat{\gamma}}_{\alpha\beta}, \; \bar{\Lambda}^{\hat{\gamma}}_{\alpha\hat{\beta}} \overset{d}{=} \Lambda^{\hat{\gamma}}_{\alpha\hat{\beta}} - \frac{1}{n} \delta^{\hat{\gamma}}_{\hat{\beta}} \Lambda^{\hat{\eta}}_{\alpha\hat{\eta}}\},$$

$$t_3 = \{\Lambda^{\hat{\gamma}}_{\alpha\beta}, \; \bar{\Lambda}^{\hat{\gamma}}_{\alpha\hat{\beta}}, \; \bar{\Lambda}^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \overset{d}{=} \Lambda^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} - \frac{1}{n+1} \delta^{\hat{\gamma}}_{(\hat{\beta}} \Lambda^{\hat{\eta}}_{\hat{\alpha})\hat{\eta}}\},$$

$t_4=\{\Lambda^{\hat\gamma}_{\alpha\varphi}, \Lambda^{\hat\gamma}_{\alpha\hat\eta}\}$, $t_5=\{\Lambda^{\hat\gamma}_{\alpha J}\}$, $t_6=\{\Lambda^{\hat\gamma}_{\alpha J}, \Lambda^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\hat\eta}\}$, $t_7=\{\Lambda^{\hat\gamma}_{JK}\}$ являются тензорами относительно прямого произведения подгрупп стационарности пары $(P^\circ, f_a(P^\circ))$ соответствующих точек. Пусть Z_i ($i=\overline{1,7}$) есть условие обращения тензора t_i в нулевой тензор. Имеем:

$$Z_7 \Rightarrow Z_6 \Rightarrow Z_5 \Rightarrow Z_4 \Rightarrow Z_1 ; \quad Z_3 \Rightarrow Z_2 \Rightarrow Z_1 \qquad (2)$$

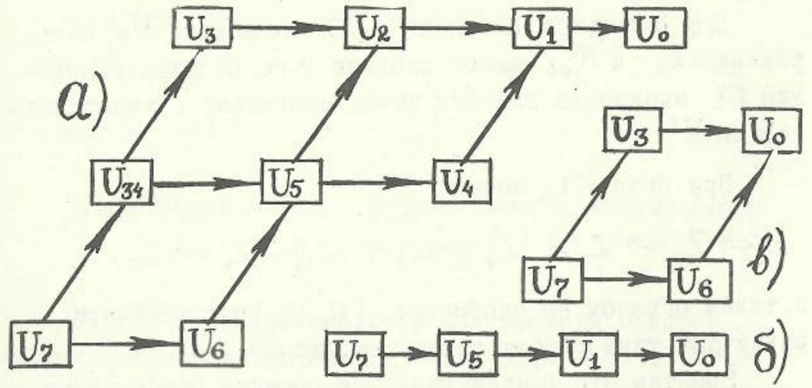
О п р е д е л е н и е 1. Точка P° области определения отображения f_a называется точкой типа U_i , если в ней выполняется условие Z_i. Точка P° называется точкой типа U_{ij}, если в ней выполняется условие $Z_{ij} \overset{d}{=} Z_i \,\&\, Z_j$.

В [3] показано существование типов U_1, U_2, U_3 и в случае отображения f . Рассмотрим точки типов U_{ij}. Импликации (2) показывают, что из всех условий Z_{ij} имеет смысл рассмотрение следующих: $Z_{24}, Z_{34}, Z_{35}, Z_{26}, Z_{36}$. Из анализа этих условий получаем:

П р е д л о ж е н и е 1. Точка P° является точкой типа U_{24} в том и только в том случае, если она является точкой типа U_5. Точка P° является точкой типа U_{36} в том и только в том случае, если она является точкой типа U_7 .

С л е д с т в и е. Точка типа U_{34} является точкой типа U_{35}. Точка типа U_6 является точкой типа U_{26}.

Таким образом, из 21 возможного типа U_{ij} лишь один (U_{34}) отличен от остальных U_i, U_{ij} . Дальнейшие объединения условий Z_i, Z_{ij} также не дают новых типов. Класс конфигураций, характеризующих точки данного типа U_i, U_{ij} , будем обозначать тем же символом. На рис. (а) представлена зависимость между возможными классами конфигураций U_i, U_{ij}, отличными друг от друга. Стрелки направлены к обозначению класса конфигураций от обозначения его подкласса. Символом U_0 обозначен класс всех конфигураций.



В [3] рассмотрены свойства ассоциированных образов в точках типов U_1, U_2, U_3. Из (8),(10) [3] вытекают

П р е д л о ж е н и е 2. В точках типа U_4 проективитет Бомпиани-Пантази ставит в соответствие всем нормалям I рода распределения $\{L^\circ\}$ ($m-n-1$)-плоскость $L^\circ \cap \Pi^\circ$.

П р е д л о ж е н и е 3. В точках типа U_5 индикатриса J и множество $\mathfrak{M}$ главных точек образованы ($m-n$)-плоскостями, параллельными подпространству L°.

Рассуждая как в [1, с.20] и учитывая (11) [3], получаем

П р е д л о ж е н и е 4. В точке P° типа U_{34} существует касательная коллинеация $K(P_J)$, сужение которой $K(P_J)|_H$ на любую нормаль I рода H является локальной коллинеацией для отображения $f_a|H$, т.е. коллинеацией, якобиан которой касается якобиана отображения $f_a|_H$ в точке P°. Множество $\mathfrak{M}$ главных точек для точки типа U_{34} является параллельной подпространству L° гиперплоскостью: $\Lambda^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\hat\gamma} X^{\hat\alpha} + (n+1) X^\circ = 0$.

П р е д л о ж е н и е 5. В точках типа U_6 сужение касательного аффинитета K_{af} на каждую нормаль I рода H является локальной коллинеацией для отображения $f_a|H$.

П р е д л о ж е н и е 6. В точке типа U_7 отображения f_a и K_{af} имеют касание 2-го порядка; замыкание $\overline{\mathfrak{M}}$ множества главных точек совпадает с гиперплоскостью Π°.

При $m>n=1$ имеем:

$$Z_1 \Leftrightarrow Z_2 \Leftrightarrow Z_3; \quad Z_4 \Leftrightarrow Z_5 \Leftrightarrow Z_{34}; \; Z_6 \Leftrightarrow Z_7,$$

и, таким образом, во множестве $\{U_i, U_{ij}\}$ остается три различных типа особых точек (см. рис.(б)).

Заметим, что фундаментальные объекты отображения $A_m \to A_n$ $(m>n)$ и объект t_7 можно относить также и к случаю $m=n$, если считать $\hat{\alpha}, \ldots = \overline{1,n}$; $\mathfrak{I}, \ldots = \overline{1,n}$; $\alpha, \beta \in \varnothing$. В этом случае $t_1 = t_2 = t_4 = t_5 = \varnothing$.

Зависимость между непустыми классами конфигураций при $m=n>1$ представлена на рис.(в).

Библиографический список

1. А н д р е е в Б.А. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии соответствий между точечным проективным пространством и пространством нуль-пар // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1974. Вып. 5. С.6-24.

2. А н д р е е в Б.А. О распределении линейных элементов, порожденных отображением $f: P_m \to A_n$ $(m>n)$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат.сб.науч.тр. / Калинингр.ун-т, 1979. Вып.10. С.5-9.

3. А н д р е е в Б.А. Некоторые типы характеристической конфигурации отображения f // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат. сб.науч.тр. / Калинингр.ун-т. Калининград. 1980. Вып.11. С.3-6.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ ОРИСФЕР В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

И.Н. А р т е м о в а

В работе рассматриваются конгруэнции орисфер с использованием интепретации Кэли-Клейна [1]. В этой интерпретации орисфера есть невырожденная и нелинейчатая поверхность второго порядка, касающаяся изнутри овального абсолюта в точке A, обладающая следующим свойством: полюс относительно абсолюта касательной плоскости к орисфере в точке M, где M -любая точка орисферы, отличная от точки A, должен лежать на прямой AM. Таким образом, конгруэнция орисфер является частным случаем конгруэнции нелинейчатых квадрик в трехмерном проективном пространстве P_3, огибающих одну нелинейчатую квадрику. Поэтому для изучения конгруэнции орисфер использовались результаты теории квадрик в P_3.

Рассмотрим в P_3 конгруэнцию (Q) невырожденных нелинейчатых квадрик, касающихся изнутри невырожденной, нелинейчатой, фиксированной квадрики Q_0, которую назовем абсолютом. Отнесем конгруэнцию (Q) к реперу $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, где A_1 -точка касания квадрики $Q \in (Q)$ с абсолютом Q_0; A_2 -произвольная точка абсолюта Q_0, отличная от A_1. Вершины A_3 и A_4 расположим на прямой, полярно сопряженной прямой A_1A_2 относительно абсолюта, так, чтобы точки A_3 и A_4 были полярно сопряжены относительно абсолюта. При надлежащей нормировке вершин уравнение абсолюта Q_0 принимает вид:

$$(x^3)^2 + (x^4)^2 - 2x^1x^2 = 0.$$

Условия инвариантности абсолюта запишутся в виде

$$\omega_\alpha^\beta = 0,\ \omega_\alpha^3 = \omega_3^\beta,\ \omega_\alpha^4 = \omega_4^\beta,\ \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0,\ \omega_3^4 = -\omega_4^3,\ \omega_3^3 = 0. \quad (1)$$

$(\alpha, \beta = 1,2;\ \alpha \neq \beta)$.